

Smíšené úlohy – s opakováním

$$V'(k, n) = n^k$$

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklady

- ① Kolika způsoby lze přemístit slova Mississippi, kolik z nich nezačíná písmenem M?

[výskyt písmen: 4 × I, 1 × M, 4 × S, 2 × P, záleží na pořadí]

$$p = P'(4, 1, 4, 2) = \frac{11!}{4! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$$

– nezačínající písmenem M: počet všech – počet začín. M

$$p = P'(4, 1, 4, 2) - P'(4, 4, 2) = \frac{11!}{4! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2!} - \frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650 - 3\,150 = 31\,500$$

- ② Knihovna má 5 regálů, do každého se vejde 20 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 20 knih. (Návod: myslíte si, že regály jsou umístěny vedle sebe a každé dva sousední jsou odděleny stejným předmětem.)

obdoba: kolika způsoby lze umístit 20 předmětů do 5ti přihrádek

záleží na pořadí, 20 knížek (každá se opakuje jednou), 4 oddělovače (přepážky),

$$\Rightarrow P'(1, 1, 1, \dots, 1, 4) = \frac{(20+4)!}{1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{24!}{4!} \doteq 2,6 \cdot 10^{22}$$

- ③ Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné 2 nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 4, 5, 6, 7, 8, 9.

počet všech trojic s opak. z 6 čísel, nezáhl. na pořadí, ALE musí platit trojúhelníková

nerovnost (4 + 4 > 9 nepl., 4 + 5 > 9 nepl., 4 + 6 > 9 pl., další v tomto systému platí,

5 + 5 > 9 pl., 5 + 6 > 9 pl. (i další v systému), 4 + 4 > 8 nepl., další už platí

$$p = K'(3, 6) - 3 = \binom{6+3-1}{3} - 3 = \binom{8}{3} - 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 3 = 56 - 3 = 53$$

- ④ V samoobsluze mají 4 druhy kávy, každý po 50 gramech. Určete, kolika způsoby lze nakoupit 250 gramů kávy, jestliže pro nákup 250 g kávy – 5 balíčků po 50 g

a) balíčků každého druhu mají dostatečný počet

$$\text{vyb. 5tici s opak. ze 4, nezáhl. na pořadí} \quad p = K'(5, 4) = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$$

b) od dvou druhů mají 10 balíčků a od zbývajících dvou pouze po 4 balíčcích

jako a), ale nelze 5 stejných bal. od 3. a 4. druhu

$$p = K'(5, 4) - 2 = \binom{5+4-1}{5} - 2 = \binom{8}{5} - 2 = 54$$

- ⑤ Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách (na jednotlivých stěnách je 1–6 ok) při vrhu třemi kostkami.

trojice s opak., neuspořádané – na pořadí tedy nezáleží [např. (1, 1, 1), (1, 3, 5)]

$$p = K'(3, 6) = \binom{3+6-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

- ⑥ Určete, kolika způsoby lze z pětikorunových a desetikorunových mincí v dostatečném počtu zaplatit částku a) 60 Kč, b) 20 Kč.

[Návod: každou částku zašifrujte pomocí písmen 2P (2 pětikorunové mince – celková hodnota 10 Kč) a D (desetikorunové mince); např. $(\underbrace{D D D D}_{60 \text{ Kč}} \underbrace{2P 2P}_{20 \text{ Kč}}), (\underbrace{D 2P}_{20 \text{ Kč}})]$

$$a) p = K'(6, 2) = \binom{6+2-1}{6} = \binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7 \text{ (šestice ze 2 prvků s opak., nez. na poř.)}$$

$$b) p = K'(2, 2) = \binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3 \text{ (dvojice ze 2 prvků s opak., nez. na poř.)}$$

[(2P 2P) – 4 pětikoruny, (D D) – 2 desetikoruny, (2P D) – 2 pětikoruny a 1 desetikoruna]

- ⑦ Kolika způsoby si mohou 3 osoby rozdělit 8 stejných jablek?

1. zp. [Návod: každé rozdělení 8 jablek mezi 3 osoby A, B, C lze zašifrovat pomocí neuspořádané osmice z těchto 3 písmen – např. A A A B B B B C]

$$p = K'(8, 3) = \binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

2. zp. [Návod: rozdělíme 8 jablek do 3 přihrádek (se 2 přepážkami)]

např. $\bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet$ uspoř. desetice ze 2 prvků ($\bullet$), záleží na pořadí

$\Rightarrow$ permutace s opakováním ($\bullet$ 8krát, $|$ 2krát)

$$p = P'(8, 2) = \frac{(8+2)!}{8! \cdot 2!} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

- ⑧ Určete, kolika způsoby si mohou 3 osoby rozdělit 4 stejná jablka a 6 stejných hrušek.

[Návod: rozdělení jablek a hrušek jsou na sobě nezávislá, dále pak jako př. 7 – např. 1. zp.]

rozdělíme 4 stejná jablka 3 osobám a pak 6 stejných hrušek 3 osobám

$$p = K'(4, 3) \cdot K'(6, 3) = \binom{4+3-1}{4} \cdot \binom{6+3-1}{6} = \binom{6}{4} \cdot \binom{8}{6} = \binom{6}{2} \cdot \binom{8}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 420$$

- ⑨ Jméno a příjmení každého obyvatele městečka s 1500 obyvateli může začínat jedním z 32 písmen. Dokažte, že aspoň 2 obyvatelé městečka mají stejné iniciály.

[Návod: Porovnejte počet všech možných iniciál s počtem obyvatel.]

iniciála – vyb. 2 písmena z 32, zál. na pořadí, písmena se mohou opak. $\Rightarrow$ variace s opak.

$$p = V'(2, 32) = 32^2 = 1024 \text{ (iniciál)}$$

Je možných 1024 různých iniciál a obyvatel je 1500, aspoň 2 obyvatelé mají stejné iniciály.

- ⑩ V sadě 32 karet je každá z následujících karet čtyřikrát: 7, 8, 9, 10, spodek, svršek, král a eso, karty téže hodnoty jsou přitom rozlišeny těmito „barvami“: červená, zelená, žlutá a kule. Určete, kolika způsoby je možné vybrat 4 karty, jestliže se rozlišují pouze

a) „barvy“ vyb. 4 karty ze 4 barev (barvy se mohou opakovat), nezáleží na pořadí

$$p = K'(4, 4) = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

b) hodnoty jednotlivých karet hodnoty karet se mohou opak., vyb. 4 karty z 8 hodnot

$$\text{karet, nezál. na poř.} \quad p = K'(4, 8) = \binom{4+8-1}{4} = \binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$$